V. Erdélyi Magyar Matematikaverseny

5-8. évfolyam

SZATMÁRNÉMETI

2017

ELŐSZÓ

Az Erdélyi Magyar Matematikaverseny gyökere az 1977-1984-es időszakra nyúlik vissza, amit az akkori hatalom az első rügyek után betiltott. Az egykori Bolyai Egyetem szellemét ápoló verseny pásztortűz parázsaként túlélte a szocializmust, és végül versenyünknek az 1990-es rendszerváltás megadta a kibontakozási lehetőséget. A brassói Áprily Lajos Főgimnáziumból indítottam útjára 1990 őszén, majd Sepsiszentgyörgy, Csíkszereda, Székelyudvarhely és Marosvásárhely körforgásában erősödött meg. 1991-ben létrehoztam Szegeden a 9-12. osztályok Nemzetközi Magyar Matematikaversenyét, ami a Kárpát-medence magyar középiskoláit vonta egybe. Erdős Pál szerint, ha erre nagyon ügyelünk, akkor ez lesz a Kárpát-medence legfontosabb tehetségápoló intézete.

„A Mindenség nem értelmetlenül kattogó, öntudatlan gépezet, hanem minden ízében Tudatos világ, amelyet egy Tökéletes Intelligencia teremtett, sőt benne van! Az atomoknak is van szerény értelmük, emlékük, érzékenységük, ők is követnek valamit: egy gondolatot, egy mintát, egy energia-törvényt, amelyből kristályok, hegyek, csillagok lesznek…” (Müller Péter), és folytatva az idézet értelmét, rájöhetünk, hogy ez a teremtési modell nem más, mint a matematika. Hiába tanulunk meg beszélni, mert először nem is tudjuk kimondani azt, ami a lelkünk mélyén él. Elhallgatjuk, vagy mást mondunk helyette. És ha nagy nehezen sikerül is végre kimondani: a másik nem érti meg. A szavakat érti persze, a mondatokat is. Csak ami a szavaink mögött rejlik, vagyis a lényeget, az igazi matematikát, azt nem érti.

Egy jó évtizedig a Székely Mikó Kollégium lett az erdélyi matematikaverseny központja, és bevonta Erdély több középiskoláját. A versenyünk felkerült a minisztérium versenynaptárába, így államilag anyagi támogatásban részesült. Ez adta meg a verseny kiterjesztésének a lehetőségét, és így a többi erdélyi magyar iskola is megszervezheti. Nagyváradon 2013-ban létrehoztuk az 5-8. osztályok számára versenyünk külön szakaszát, és rá egy évre Dunaszerdahelyen megszületett az 5-8. osztályos tanulók Nemzetközi Magyar Matematikaversenye is. Románia 18 magyarlakta megyéjében megtartottuk az 5-12. osztályosok részére a helyi és megyei szakaszokat, és az itt továbbjutók kerülnek az országos szakaszra. Ezen a versenyen pedig kialakul országunk azon 40 személyes csapata, aki képviseli Erdélyt a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen (5-8. osztályok). Kölcsey szelleme áthatotta a 2010-ben tartott Nemzetközi Magyar Matematikaverseny lelkületét, és ezt a neves versenyt a szatmárnémeti Kölcsey Ferenc Líceum szervezte meg. Szatmárnémeti immár másodszor is beírta nevét az erdélyi magyar matematika történetébe azzal, hogy 2017-ben megszervezte az V. Erdélyi Magyar Matematikaversenyt. Ennek a versenynek a szellemét Szentgyörgyi Albert Nobel-díjas tudósunk „*Látni, amit mindenki lát, és gondolni, amit még senki sem gondolt*” híres idézete tükrözi a legjobban.

A továbbjutó diákok részt vesznek nemsokára a Beregszászon tartandó IV. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen (5-8. osztályok).

Köszönjük Koczinger Éva tanárnőnek azt, hogy felvállalta ezt a versenyt, és megszervezte. Köszönet a Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum igazgatójának, Ádámkó István Csaba úrnak, és a líceum csodálatos munkaközösségének, a tanfelügyelőségnek, valamint a város vezetőségének. Köszönet dr. Kupán Pálnak, a marosvásárhelyi Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem docensének, hogy vállalta a versenybizottság elnöki tisztségét. Köszönet Varga György Csaba fizika-informatika szakos tanár úrnak, aki e verseny titkári tisztjét töltötte be.

Köszönet minden matematikatanárnak, aki lelkiismeretesen foglalkozik a szürke hétköznapokon diákjai felkészítésével. Nélkülük nem élhetne ez a verseny.

Ez a verseny 27 év alatt az erdélyi diákjaink legfontosabb tehetséggondozó intézete lett, egykori díjazottak világhírű kutatók, külföldi neves egyetemeken tanárok, a többiek a hazai egyetemek megbecsült matematikusai, vagy iskoláink tanári karát erősítik.

Drága gyermekeink, ti vagytok a jövőnk, tiértetek harcolunk, dolgozunk. Egykoron ti vigyétek tovább ezt a lángot, és soha ne felejtsétek el azt, hogy itt Erdélyben a két Bolyai emelte a magyar matematikát a csillagos egekbe. Azóta világhatalom vagyunk, és ti is ennek vagytok a szerves része.

Dr. Bencze Mihály
a versenybizottság alelnöke
a bukaresti Ady Endre Elméleti Líceum igazgatója

FELADATOK

V. osztály

1. feladat:

Egy tündér három dobozban levő színes üveggolyókat rendezget. Az első dobozból pontosan annyit tesz át a másodikba, amennyi a másodikban van. Majd a másodikból a harmadikba annyit tesz át, amennyi a harmadikban van. Végül a harmadikból az elsőbe annyit tesz át, amennyi az elsőben van. Így mindegyik dobozban 16 golyó lesz. Hány üveggolyó volt eredetileg a három dobozban külön-külön?

2. feladat:

Egy számhármas elemei egymásutáni számok, melyek összege 34 és 334 között van.

a) Határozd meg a legkisebb, illetve a legnagyobb számokból álló ilyen számhármast!

b) Ha S_1, S_2, …, S_n az ilyen számhármasok elemeinek összegét jelöli, számítsd ki az $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ összeget!

3. feladat:

A varázslóképzőben ezt tanítják: *„Írjatok a TELEFONKERESŐ szóban a különböző betűk helyére különböző, az azonos betűk helyére azonos számjegyet! Ha az így leírt szám prímszám lesz, a világ összes telefonja egyszerre megcsörren.”* Meg lehet-e így csörrenteni egyszerre a világ összes telefonját?

4. feladat:

Csiga Csabi távcsúszó világbajnok egy 2017 sorból és 2016 oszlopból álló négyzetrácson csúszkál. Csabi a bal alsó sarokban található négyzetből indul el, és mindig olyan négyzetbe csúszik át, amelyik csak sarkában érinti azt a négyzetet, ahol ő áll. Eljuthat-e Csabi a négyzetrács jobb felső sarkába?

5. feladat:

Burkus király serege 77 osztagból áll. Bármely két osztagról elmondható, hogy az egyik osztag minden katonája a másik osztag katonái közül pontosan egy katonát ismer, és az ismeretség kölcsönös. A király 7 osztag katonáit szétosztotta a többi osztag között úgy, hogy minden osztagba legkevesebb 2 katona került. Az elosztás után minden osztag létszáma különbözött. Legkevesebb hány katona lehetett Burkus király seregében?

6. feladat:

a) Igazold, hogy a $2^n + n^2$ alakú természetes számok nem oszthatók 7-tel!

b) Igazold, hogy a $3^n + n^3$ alakú természetes számok közül végtelen sok osztható 7-tel!

c) Határozd meg az összes $3^n + n^3$ alakú 7-tel osztható természetes számot!

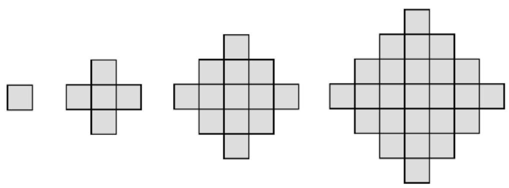
VI. osztály

1. feladat:

Ákos 7 barátjával egy asztal körül kártyázott. Egy csomag – 48 lapból álló – kártyát úgy osztott szét, hogy bármelyik játékos kezébe éppen annyi lap került, mint két szomszédja lapjainak számtani közepe. Igazoljátok, hogy bármelyik három játékos kezében lévő lapok összege 9-cel osztható.

2. feladat:

Botond lerajzolta a következő ábrákat, és ezt folytatva egyre nagyobb ábrákat rajzolt.



1. 2. 3. 4.

Lerajzolta a tizedik ábrát is. Hány négyzetből áll a tizedik ábra?

3. feladat:

Határozd meg az (a,b) természetes számpárokat, ha $a^x=64$, $b^y=729$ és $\frac{x}{y}=\left[2017-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2017}{2018}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2018}\right)$.

4. feladat:

Adottak $a=2n+1$, $b=3n+2$, $c=4n+3$, $d=5n+4$, $e=6n+5$, $f=7n+6$, $n\in\mathbb{N}$ természetes számok. Jelöljük $[x,y]$-nal az x és y számok legkisebb közös többszörösét. Igazold, hogy $\frac{[e,f]}{e}-\frac{[d,e]}{d}+\frac{[c,d]}{c}-\frac{[b,c]}{b}=a+1$.

5. feladat:

Adott egy egyenesen az $OA_1 = 1$ szakasz. Legyen A_2 az A_1 pontnak az O pontra vonatkozó szimmetrikusa, A_3 az A_2-nek A_1-re vonatkozó szimmetrikusa, ..., A_n az A_{n-1} pontnak az A_{n-2} szerinti szimmetrikusa.

a) Számítsd ki az A_8A_9 és OA_9 szakaszok hosszát!

b) Igazold, hogy $OA_{39} = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{37}$.

c) Bizonyítsd be, hogy $1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2017} = \frac{1}{3} \cdot \left(2^{2019} + 1\right)$.

6. feladat:

Az $ABCD$ négyzet AC átlóján felvesszük az M pontot úgy, hogy $[AM] \equiv [AB]$. Adott $P \in BC$ úgy, hogy $MP \perp AC$, valamint $R \in AB$ úgy, hogy $B \in (AR)$ és $[BP] \equiv [BR]$. Igazold, hogy:

a) $[MC] \equiv [MP] \equiv [BP]$.

b) Az M, P és R pontok egy egyenesen helyezkednek el.

VII. osztály

1. feladat:

Oldd meg az egyenletet az egész számok halmazán:

$$x^2 - xy + 7y = 0$$

2. feladat:

Határozd meg az összes ötjegyű természetes számot, amelynek az a tulajdonsága, hogy ha bármelyik számjegyét kitöröljük, a megmaradt négyjegyű szám osztja az eredetit!

3. feladat:

Adott a következő ábra:

						1						
					2		**3**					
				4		**5**		**6**				
			7		**8**		**9**		**10**			
		11		**12**		**13**		**14**		**15**		
	16		**17**		**18**		**19**		**20**		**21**	
22		**23**		**24**		**25**		**26**		**27**		**28**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

a) Igazold, hogy a 64-ik sor első eleme 2017!
b) Hányadik sorban lesz az elemek összege 505?
c) Igazold, hogy nem létezik olyan sor, melyben az elemek összege 2017.

4. feladat:

Péter osztályába 29 tanuló jár. A lányok az osztályból szőkék és barnák. Húsvétkor a fiúk meglocsolták a lányokat. Péter 4 lányt, Balázs 5 lányt, Tamás 6 lányt, és így tovább, minden fiú eggyel több lányt mind előző társa, a végén Dezső minden lányt meglocsolt. Péter másnap kimutatást készített, melyből kiderült, hogy a szőke lányokat annak ellenére, hogy kevesebben vannak, mégis többször locsolták meg, mint a barnákat, és minden barna lányt ugyanannyiszor locsoltak meg.

a) Hány fiú volt az osztályban?
b) Legtöbb hány barna hajú lány lehetett az osztályban, amikor a szőke lányokat ért locsolások száma a legkisebb?

5. feladat:

Adott az $ABCD$ négyzet, valamint $E \in (BC)$ és $F \in (DC)$ pontok úgy, hogy $m(BAE\sphericalangle) = 15°$ és $m(DAF\sphericalangle) = 30°$

a) Határozd meg az AEF háromszög szögeinek a mértékét!
b) Ha a négyzet oldalának hossza 12 cm, számítsd ki az $AFCB$ négyszög területét!

6. feladat:

Egy ABC háromszög C csúcsán keresztül az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a B szög belső szögfelezőjét D pontban metszi.

a) Ha $m(\hat{A}) \geq m(\hat{C})$, igazold, hogy $2BC \geq AD + AB$!

b) Mikor áll fenn az egyenlőség a fenti összefüggésben?

VIII. osztály

1. feladat:

Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest egyenlő hosszúságú éleit azonos színnel festették be. Koppány az A csúcsból az élek mentén a C' csúcsba vezető utakat kereste úgy, hogy egy úton belül a téglatest bármelyik csúcsát maximum egyszer érintette, és közben számolta, hogy a különböző színű élekből hányat érintett. Határozd meg, hogy hány élet számolt össze az egyes színekből, ha tudjuk, hogy az összes lehetséges utat végig járta.

2. feladat:

a) Igazold, hogy $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{2016\cdot 2017}}{4033}<1008.$

b) Határozd meg az $n\in N$ legnagyobb értékét úgy, hogy fennálljon a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{2n\cdot(2n+1)}}{4n+1}<2017.$$

3. feladat:

Határozd meg azokat az x és y egész számokat, amelyekre $y\cdot\left(x-5y^2\right)=x$.

4. feladat:

Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $3n-5,\ 4n-3,\ 5n+1$ három egymás utáni természetes szám négyzetei. Melyek ezek a négyzetszámok?

5. feladat:

Az ABCD trapézban AB ∥ CD, AB> CD és $M\in[AB]$ úgy, hogy $[AD]\equiv[AM]$ és $[BC]\equiv[BM]$.

Igazold, hogy:

a) DM és CM szögfelezők;
b) a trapéz belső szögfelezőinek metszéspontjai egy körbeírható négyszög csúcsai;
c) a $CMD\sphericalangle$ mértéke az $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ szögek mértékeinek számtani közepe;
d) az $APB\sphericalangle$ mértéke a $D\sphericalangle$ és C$\sphericalangle$ mértékeinek számtani közepe.

6. feladat:

Az *ABCD* trapéz CD kisalapjának hossza 6 cm. Az *AB* oldalának *O* felezőpontjában merőlegest állítunk a trapéz síkjára, amelyen felvesszük a *P* pontot. Tudjuk, hogy a *P* pont $3\sqrt{15}$ cm távolságra van a trapéz kisalapjától és a száraitól, a trapéz síkjától mért távolsága pedig $6\sqrt{3}$ cm.

a) Igazold, hogy a trapéz egyenlő szárú!
b) Számítsd ki a nagyalap hosszát!
c) Ha $AD \cap BC = \{E\}$ és S a $[PE]$ felezőpontja, bizonyítsd be, hogy $PE \perp (SAB)$!

MEGOLDÁSOK

V. osztály

1. feladat

Egy tündér három dobozban levő színes üveggolyókat rendezget. Az első dobozból pontosan annyit tesz át a másodikba, amennyi a másodikban van. Majd a másodikból a harmadikba annyit tesz át, amennyi a harmadikban van. Végül a harmadikból az elsőbe annyit tesz át, amennyi az elsőben van. Így mindegyik dobozban 16 golyó lesz. Hány üveggolyó volt eredetileg a három dobozban külön-külön?

Spier Tünde, Arad

I. megoldás: Legyen a, b, c az első, második, illetve harmadik dobozban levő golyók száma.

	a	b	c
1. Lépés:	$a-b$	$2b$	c
2. Lépés:	$a-b$	$2b-c$	$2c$
3. Lépés:	$2(a-b)$	$2b-c$	$2c-(a-b)$

Mivel minden dobozban 16 golyó lett, ezért $2(a-b)=16$, ahonnan $a-b=8$, azaz $2c-(a-b)=16 \Rightarrow 2c=24 \Rightarrow c=12$. Ekkor $2b-c=16 \Rightarrow 2b=28 \Rightarrow b=14$. Végül az $a-b=8$ egyenlőségből $a=22$. Tehát a dobozokban 22, 14, illetve 12 golyó volt.

II. megoldás: Visszafele gondolkodva, lépésenként feltüntetjük egy adott pillanatban a dobozokban levő golyók számát:

	1. doboz	2. doboz	3. doboz
3.-ból 1.-be	16	16	16
2.-ból 3.-ba	8	16	24
1.-ből 2.-ba	8	28	12
eredetileg	**22**	**14**	**12**

2. feladat

Egy számhármas elemei egymásutáni számok, melyek összege 34 és 334 között van.

a) Határozd meg a legkisebb, illetve a legnagyobb számokból álló ilyen számhármast!

b) Ha S_1, S_2, …, S_n az ilyen számhármasok elemeinek összegét jelöli, számítsd ki az $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ összeget!

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás:

a) Legyenek a számhármas elemei $x-1, x, x+1$, ekkor összegük $3x$,és $34 < 3x < 334$, ahonnan $x \in \{12, 13, \ldots, 111\}$, tehát a legkisebb számokból álló számhármas a $(11, 12, 13)$, a legnagyobb pedig $(110, 111, 112)$.

b) Mivel $111 - 12 + 1 = 100$, ezért 100 db. ilyen számhármas van. $S_1 = 36$, $S_2 = 39$, …, $S_{100} = 333$, és $S = 36 + 39 + \ldots + 333 = 369 \cdot 50 = 18450$.

3. feladat

A varázslóképzőben ezt tanítják: *„Írjatok a TELEFONKERESŐ szóban a különböző betűk helyére különböző, az azonos betűk helyére azonos számjegyet! Ha az így leírt szám prímszám lesz, a világ összes telefonja egyszerre megcsörren.”* Meg lehet-e így csörrenteni egyszerre a világ összes telefonját?

Nagy-Baló András, Budapest

Megoldás:

Az E betű négyszer, a többi 9 betű egyszer van jelen, vagyis mind a 10 számjegy jelen van egyszer és valamelyik még 3-szor. A 10 számjegy összege 45 és ha hozzáadjuk még a 3 azonos számjegyet, a számjegyek összege 3-mal osztható lesz, így maga a szám is osztható 3-mal. De ez a szám több 3-nál, így nem lehet prímszám, tehát így nem lehet a világ összes telefonját egyszerre megcsörrenteni.

4. feladat

Csiga Csabi távcsúszó világbajnok egy 2017 sorból és 2016 oszlopból álló négyzetrácson csúszkál. Csabi a bal alsó sarokban található négyzetből indul el, és mindig olyan négyzetbe csúszik át, amelyik csak sarkában érinti azt a négyzetet, ahol ő áll. Eljuthat-e Csabi a négyzetrács jobb felső sarkába?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

I. megoldás: Színezzük ki a négyzetrácsot fehérre, illetve feketére sakktáblaszerűen. Legyen a bal alsó sarok fekete. Mivel Csiga Csabi fekete négyzetből indul, akkor csak fekete színű négyzetekre kerül. Ugyanakkor mivel 2016 páros, ezért az alsó sor utolsó négyzete fehér, és mivel 2017 páratlan, a jobb felső sarok szintén fehér színű, tehát Csiga Csabi oda semmiképp sem juthat el.

II. megoldás: Számozzuk meg a rácsnégyzeteket balról jobbra 1-től 2016-ig és lentről fölfele 1-től 2017-ig. Ekkor Csabinak az 1. sor 1. oszlopából a 2017. sor 2016. oszlopába kell eljutnia.
Mivel Csabi csak olyan négyzetbe csúszik át, amelyik csak sarkában érinti azt a négyzetet, ahol ő áll, a sorok, illetve oszlopok sorszámának összege vagy 2-vel nő, vagy 2-vel csökken vagy nem változik, tehát az összeg paritása változatlan.
Mivel a bal alsó rácsnégyzet sor-, illetve oszlopszámának összege páros, míg a jobb felső saroknégyzeté páratlan, ezért Csabi nem kerülhet oda.

5. feladat

Burkus király serege 77 osztagból áll. Bármely két osztagról elmondható, hogy az egyik osztag minden katonája a másik osztag katonái közül pontosan egy katonát ismer, és az ismeretség kölcsönös. A király 7 osztag katonáit szétosztotta a többi osztag között úgy, hogy minden osztagba legkevesebb 2 katona került. Az elosztás után minden osztag létszáma különbözött. Legkevesebb hány katona lehetett Burkus király seregében?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás: Mivel bármely két osztagról elmondható, hogy az egyik osztag minden katonája a másik osztag katonái közül pontosan egy katonát ismer, és az ismeretség kölcsönös, ezért kezdetben minden osztagban azonos létszámú katona volt.

Valóban, hiszen ha egy kiválasztott A osztagban több katona van, mint egy másik B osztagban, mivel az A osztag minden katonája pontosan egy katonát ismer a B katonái közül, ezért a B osztagból valakinek legalább két ismerőse lesz az A osztagban, ami ellentmondáshoz vezet.

Az elosztás után 70 osztagba legkevesebb $2+3+...+71=70\cdot\frac{73}{2}=2555$ katona került, tehát az szétosztott 7 osztag legkevesebb $2555:7=365$-ös létszámú volt. Burkus király serege legkevesebb $77\cdot 365=28105$ katonából állt.

6. feladat

a) Igazold, hogy a 2^n+n^2 alakú természetes számok nem oszthatók 7-tel!

b) Igazold, hogy a 3^n+n^3 alakú természetes számok közül végtelen sok osztható 7-tel!

c) Határozd meg az összes 3^n+n^3 alakú 7-tel osztható természetes számot!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás:

a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n -nek 7-tel való osztási maradéka	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1
n^2 -nek 7-tel való osztási maradéka	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4

A maradékok összege nem lehet sem 0, sem 7, így az adott szám nem osztható 7 – tel.

b)

n	0	1	2	3	4	5	**6**	7	8	**9**
3^n -nek 7-tel való osztási maradéka	1	3	2	6	4	5	**1**	3	2	**6**
n^3 -nak 7-tel való osztási maradéka	0	1	1	6	1	6	**6**	0	1	**1**

Itt a maradékok összege lehet 7. A legkisebb ilyen szám $n=6$ esetén
$3^6+6^3=729+216=945=5\cdot 7\cdot 9$.
A maradékok ismétlődnek, és amikor az egyiknek 1 és a másiknak 6 a maradéka, akkor 3^n+n^3 osztható 7–tel.

c) Ha $n=6k$, akkor $3^n=3^{6k}=27^{2k}=(28-1)^{2k}=7M+1$, és $n=7l+6$, akkor $n^3=(7l+6)^3=7M+6$, így az összegük osztható 7-tel, ahonnan $6k=7l+6 \Leftrightarrow l=6t-6$, így $k=7t-6$ és $n=42t-36$, $t\in\mathbb{N}^*$.
Ha $n=6k+3$, akkor $3^n=3^{6k+3}=27^{2k+1}=27\cdot(28-1)^{2k}=(3\cdot 7+6)\cdot(28-1)^{2k}=7M+6$, és $n=7l+2$, akkor $n^3=(7l+2)^3=7M+1$, így az összegük szintén osztható 7-tel, ahonnan $6k+3=7l+2 \Leftrightarrow k=l+\dfrac{l+5}{6} \Leftrightarrow l=6t-5$, így $k=7t-5$ és $n=42t-33$, $t\in\mathbb{N}^*$.
Tehát $M=\{3^n+n^3 \mid n=42t-36 \text{ vagy } n=42t-33,\ t\in\mathbb{N}^*\}$

VI. osztály

1. feladat:

Ákos 7 barátjával egy asztal körül kártyázott. Egy csomag – 48 lapból álló – kártyát úgy osztott szét, hogy bármelyik játékos kezébe éppen annyi lap került, mint két szomszédja lapjainak számtani közepe. Igazoljátok, hogy bármelyik három játékos kezében lévő lapok összege 9-cel osztható.

Császár Sándor, Csíkszereda

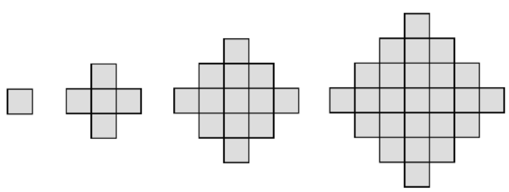
Megoldás:

Jelöljük x-szel a legkevesebb kártyalappal rendelkező játékos kártyalapjainak számát, két szomszédja kártyalapjainak lapjainak számát pedig m és n-nel. Ekkor felírható: $x=\frac{m+n}{2}$, tehát $2x=m+n$, ahonnan $m-x+n-x=0$.

Mivel $m \geq x$ és $n \geq x$ következik, hogy $m=n=x$, tehát mindenki kezébe azonos számú lap kerül: $48:8=6$. Bármely 3 játékos lapjainak száma tehát 18, ami osztható 9-cel.

2. feladat:

Botond lerajzolta a következő ábrákat, és ezt folytatva egyre nagyobb ábrákat rajzolt.



1. 2. 3. 4.

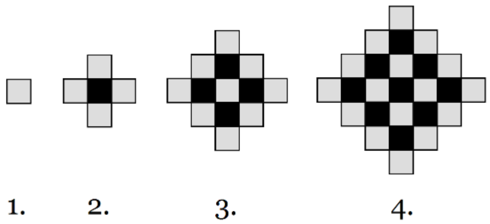
Lerajzolta a tizedik ábrát is. Hány négyzetből áll a tizedik ábra?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

Látható az ábrákról, hogy a négyzetek száma két négyzetszám összege:

a 2. ábra $2^2+1^2=5$, a 3. ábra $3^2+2^2=13$, a 4. ábra $4^2+3^2=25$ négyzetből áll.



A **10. ábra** $10^2+9^2=100+81=181$ **négyzetből áll.**

3. feladat:

Határozd meg az (a,b) természetes számpárokat, ha $a^x=64$, $b^y=729$ és $\frac{x}{y}=\left[2017-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2017}{2018}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2018}\right)$.

Jakab-Medvessi Alice, Kolozsvár

Megoldás:

$\frac{x}{y}=\left(1-\frac{1}{2}+1-\frac{2}{3}+1-\frac{3}{4}+\ldots+1-\frac{2017}{2018}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2018}\right)$, tehát

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2018}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2018}\right)=1,$$

innen $x=y$

Mivel $a^x=64$ és a természetes szám a következő eseteket különböztetjük meg:

1. eset $a=2 \Rightarrow x=6 \Rightarrow b=3$
2. eset $a=4 \Rightarrow x=3 \Rightarrow b=9$
3. eset $a=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow b=27$
4. eset $a=64 \Rightarrow x=1 \Rightarrow b=729$

Tehát a keresett számpárok: $\{(2,3),(4,9),(8,27),(64,729)\}$.

4. feladat:

Adottak $a=2n+1,\ b=3n+2,\ c=4n+3,\ d=5n+4,\ e=6n+5,\ f=7n+6,\ n\in\mathbb{N}$ természetes számok. Jelöljük $[x,y]$-nal az x és y számok legkisebb közös többszörösét. Igazold, hogy $\frac{[e,f]}{e}-\frac{[d,e]}{d}+\frac{[c,d]}{c}-\frac{[b,c]}{b}=a+1$.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

$m=(e,f)\Rightarrow m|e$ és $m|f\Rightarrow m|(6f-7e)\Rightarrow m|(42n+36-42n-35)\Rightarrow m|1\Rightarrow m=1$ tehát $(e,f)=1$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $(b,c)=1$, $(c,d)=1$ és $(d,e)=1$.

Ismert, hogy $[x,y]=\frac{xy}{(x,y)}$ tehát $\frac{[e,f]}{e}=\frac{ef}{e}=f$.

Hasonlóan következik, hogy $\frac{[d,e]}{d}=e$, $\frac{[c,d]}{c}=d$.

Így $\frac{[e,f]}{e}-\frac{[d,e]}{d}+\frac{[c,d]}{c}-\frac{[b,c]}{b}=f-e+d-c=n+1+n+1=2n+2=a+1$.

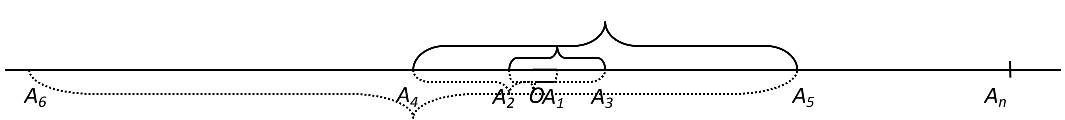
5. feladat:

Adott egy egyenesen az $OA_1=1$ egyszégnyi hosszúságú szakasz. Legyen A_2 az A_1 pontnak az O szerinti szimmetrikusa, A_3 az A_2-nek A_1 szerinti szimmetrikusa, ..., A_n az A_{n-1} pontnak az A_{n-2} szerinti szimmetrikusa.

a) Számítsd ki az $[A_8A_9]$ és $[OA_9]$ szakaszok hosszát!
b) Igazold, hogy $OA_{39}=1+2+2^3+2^5+\ldots+2^{37}$.
c) Bizonyítsd be, hogy $1+2+2^3+2^5+\ldots+2^{2017}=\frac{1}{3}\cdot\left(2^{2019}+1\right)$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás:



a)

$OA_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 2^2$, $A_3A_4 = 2^3$, $A_4A_5 = 2^4$, ..., $A_{n-1}A_n = 2^{n-1}$

$A_8A_9 = 2^8 = 256$

$OA_9 = OA_1 - A_1A_2 + A_2A_3 - \ldots - A_7A_8 + A_8A_9 = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \ldots - 2^7 + 2^8 =$

$= 1 + 2\cdot(2-1) + 2^3\cdot(2-1) + \ldots + 2^7\cdot(2-1) = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 43 + 128 = 171.$

b)

$OA_{39} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \ldots - 2^{37} + 2^{38} = 1 + 2\cdot(2-1) + 2^3\cdot(2-1) + 2^5\cdot(2-1) + \ldots + 2^{37}\cdot(2-1)$
$= 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{37}$

c)

Legyen $S = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2017}$. Ezt az összefüggést beszorozva 2^2-vel

$4S = 2^2 \cdot S = 2^2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2019}$, a két összefüggés különbsége:

$3S = 2^{2019} + 2^2 - 1 - 2 = 2^{2019} + 1$

$S = \frac{1}{3}\cdot\left(2^{2019} + 1\right)$.

6. feladat:

Az $ABCD$ négyzet AC átlóján felvesszük az M pontot úgy, hogy $[AM] \equiv [AB]$. Adott $P \in BC$ úgy, hogy $MP \perp AC$, valamint $R \in AB$ úgy, hogy $B \in (AR)$ és $[BP] \equiv [BR]$. Igazold, hogy:

a) $[MC] \equiv [MP] \equiv [BP]$.
b) Az M, P és R pontok egy egyenesen helyezkednek el.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

a) Ha egy derékszögű háromszögben egyik hegyesszög mértéke $45°$-os, akkor a másik hegyesszög mértéke is annyi. Ezért az MPC_Δ egyenlő szárú, tehát $[MC] \equiv [MP]$ (1).

Mivel az ABM háromszög egyenlő szárú, következik, hogy
$m\left(ABM\right) = m\left(AMB\right) = \alpha$.

Akkor
$m\left(BMP\right) = 180° - m\left(AMB\right) - m\left(PMC\right) = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$
és $m\left(MBP\right) = 90° - m\left(ABM\right) = 90° - \alpha$,

tehát $m\left(BMP\right) = m\left(MBP\right)$,

ezért az BMP háromszög is egyenlő szárú, innen következik, hogy $[PB] \equiv [MP]$ (2).

Az (1) és (2) összefüggések alapján tehát $[MC] \equiv [MP] \equiv [BP]$.

b) Mivel $BP \equiv BR$, a BPR_{Δ} egyenlő szárú és mindkét hegyesszöge $45°$ -os. A B, P és C pontok egy egyenesen helyezkednek el, $m\left(BPR\right) = m\left(MPC\right) = 45°$, következik, hogy a BPR és MPC szögek csúcsszögek, tehát az M , P és R pontok egy egyenesen helyezkednek el.

VII. osztály

1. feladat:

Old meg az egyenletet az egész számok halmazán:

$$x^2 - xy + 7y = 0$$

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás:

$x^2 - y(x-7) = 0$

$y = \frac{x^2}{x-7}$,($x \neq 7$, az $x = 7$, az egyenletnek nincs megoldása) , y egész szám, $(x-7)|x^2$;

$(x-7)|x^2 - 49 + 49$, de $(x-7)|x^2 - 49 \Longrightarrow (x-7)|49$

$x - 7 \in \{-49, -7, -1, 1, 7, 49\}$, $x \in \{-42, 0, 6, 8, 14, 56\}$.

2. feladat:

Határozd meg az összes ötjegyű természetes számot, amelynek az a tulajdonsága, hogy ha bármelyik számjegyét kitöröljük, a megmaradt négyjegyű szám osztja az eredetit!

Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Legyen az ötjegyű szám $\overline{abcde}$.

$\overline{abcde} \vdots \overline{abcd}$, $\overline{abcde} \vdots \overline{abce}$, $\overline{abcde} \vdots \overline{abde}$, $\overline{abcde} \vdots \overline{acde}$, $\overline{abcde} \vdots \overline{bcde}$.

$$\left.\begin{array}{r}\overline{abcde} = 10 \cdot \overline{abcd} + e\\ \overline{abcde} \vdots \overline{abcd}\end{array}\right\} \Rightarrow e = 0.$$

$$\left.\begin{array}{c} e = 0\\ \overline{abcde} \vdots \overline{abce}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{abcd0} \vdots \overline{abc0} \Rightarrow \overline{abcd} \vdots \overline{abc} \Rightarrow d = 0 .$$

$$\left.\begin{array}{c} e = d = 0\\ \overline{abcde} \vdots \overline{abce}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{abc00} \vdots \overline{ab00} \Rightarrow \overline{abc} \vdots \overline{ab} \Rightarrow c = 0 .$$

$$\left.\begin{array}{c} e = d = c = 0\\ \overline{abcde} \vdots \overline{abce}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ab000} \vdots \overline{a000} \Rightarrow \overline{ab} \vdots \overline{a} \Rightarrow b \vdots a \Rightarrow b = k \cdot a .$$

$$\left.\begin{array}{l} Mivel\ e=d=c=0 \\ \overline{abcde} \vdots \overline{abce} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ab000} \vdots \overline{b000} \quad \Rightarrow \overline{ab} \vdots b \quad \Rightarrow 10a \vdots b \Longrightarrow 10a \vdots k\cdot a \Longrightarrow 10 \vdots k \Longrightarrow \ldots\ldots k \in \{1,2,5\}.$$

Ha: $k=1 \Longrightarrow 11000, 22000, \ldots, 99000$; $k=2 \Longrightarrow 12000, 24000, 36000, 48000$;

$k=5 \Longrightarrow 15000.$

3. feladat:

Adott a következő ábra:

```
                  1
               2     3
            4     5     6
         7     8     9     10
      11    12    13    14    15
   16    17    18    19    20    21
22    23    24    25    26    27    28
…  …  …  …  …  …  …  …  …  …  …  …  …
```

a) Igazold, hogy a 64-ik sor első eleme 2017!
b) Hányadik sorban lesz az elemek összege 505?
c) Igazold, hogy nem létezik olyan sor, melyben az elemek összege 2017.

Durugy Erika, Torda

Megoldás:

a) Észrevesszük, hogy az n-edik sor utolsó eleme az $1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$.
A 63. sor utolsó eleme: 1+2+…+63=2016. Tehát a 64. sor első eleme a 2017.

b) Az n-edik sor első eleme: $\frac{(n+1)\cdot n}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)\cdot n}{2}+1$, utolsó eleme pedig $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$
Ekkor a sor elemeinek összege: $n\cdot\frac{\frac{(n-1)\cdot n}{2}+1+\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{2}=n\cdot\frac{2n^2+2}{4}=\frac{n\cdot(n^2+1)}{2}=\frac{10\cdot 101}{2}=505$. Tehát n=10.

c) Az $\frac{n\cdot(n^2+1)}{2}=2017$ egyenletnek a természetes számok halmazán nincs megoldása, mert 4034 nem írható fel n és n^2+1 alakú számok szorzataként, tehát nincs az ábrának olyan sora, melyben a számok összege 2017.

4. feladat:

Péter osztályába 29 tanuló jár. A lányok az osztályból szőkék és barnák. Húsvétkor a fiúk meglocsolták a lányokat. Péter 4 lányt, Balázs 5 lányt, Tamás 6 lányt, és így tovább, minden fiú egyel több lányt mind előző társa, a végén Dezső minden lányt meglocsolt. Péter másnap kimutatást készített, melyből kiderült, hogy a szőke lányokat annak ellenére, hogy kevesebben vannak, mégis többször locsolták meg, mint a barnákat, és minden barna lányt ugyanannyiszor locsoltak meg.

a) Hány fiú volt az osztályban?
b) Legtöbb hány barna hajú lány lehetett az osztályban, amikor a szőke lányokat ért locsolások száma a legkisebb?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás:

a) Jelöljük a fiúk számát n- nel. Ekkor a lányok száma n+3, felírható: n+n+3=29 , tehát 13 fiú van az osztályban.
b) A lányok száma 16.

A szőke lányok kevesebben vannak, mint a barna lányok, tehát legfeljebb 7 szőke lány lehet az osztályban és legalább 9 barna hajú lány .

A locsolások száma $4+5+6+\cdots+16=13\cdot\frac{20}{2}=130.$

A barna hajú lányokat összesen legfeljebb 64-szer locsolták meg .

Mivel minden barna hajú lánynak ugyanannyi locsolója volt, a következő lehetőségek jöhetnek számításba a barnák száma szerint:

Ha 64-szer locsolták meg a barna hajú lányokat és 64= 2·32=4·16=8·8, akkor csak a 4· 16 eset lehetséges, ahol 16 a barna hajú lányok száma. A szőkék száma ebben az esetben 0, de ez lehetetlen.

Ha 63- szor locsolták meg a barna hajú lányokat és 63= 7·9, akkor 9 barna hajú lány lehet az osztályban. Ekkor a szőkéket 67-szer locsolták meg.

Minden más esetben a szőkéket több mint 67-szer locsolták volna meg. Mivel a szőkék locsolásainak száma a lehető legkevesebb kell legyen, a helyes megoldás:

9 barna hajú lány van az osztályban.

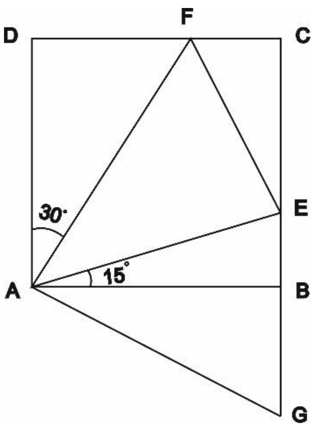
5. feladat:

Adott az $ABCD$ négyzet, valamint $E\in(BC)$ és $F\in(DC)$ pontok úgy, hogy $m(BAE\sphericalangle)=15°$ és $m(DAF\sphericalangle)=30°$

a) Határozd meg az AEF háromszög szögeinek a mértékét!
b) Ha a négyzet oldalának hossza 12 cm, számítsd ki az $AFCB$ négyszög területét!

Illyés Katalin, Vulkán

Megoldás:



a) $m(FAE\sphericalangle) = 90° - (30° + 15°) = 45°$

Segédszerkesztés:

Megszerkesztjük a *G* pontot úgy, hogy $B \in (CG)$ és $(BG) \equiv (DF)$

$DAF\Delta \equiv BAG\Delta$ (B.B. eset) . $m(EAG\sphericalangle) = 45°$. Mivel $(AF) \equiv (AG)$,

$(AE) \equiv (AE)$ és $FAE\sphericalangle \equiv EAG\sphericalangle \Rightarrow AEF\Delta \equiv AEG\Delta$.

$\Rightarrow$ $AEF\sphericalangle \equiv$ $AEG\sphericalangle$ és ABE Δ-ben $m(AEB\sphericalangle) = 90° - 15° = 75°$

$\Rightarrow (m(AEF\sphericalangle)=75°$, tehát $(AFE\sphericalangle) = 60°$.

b) A $DAF\Delta$-ben $AF = 2DF$. Pitagorász tételét alkalmazva $DF = 4\sqrt{3}$ cm.

$T_{ABCF} = T_{ABCD} - T_{ADF} = 144 - 24\sqrt{3} = 24 \cdot \left(6 - \sqrt{3}\right) cm^2$.

6. feladat:

Egy ABC háromszög C csúcsán keresztül az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a B szög belső szögfelezőjét D pontban metszi.

a) Ha $m(\hat{A}) \geq m(\hat{C})$, igazold, hogy $2BC \geq AD + AB$!

b) Mikor áll fenn az egyenlőség a fenti összefüggésben ?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

a) Mivel $m(\hat{A}) \geq m(\hat{C})$, következik, hogy $BC \geq AB$.

A D ponton keresztül is szerkesszük meg a BC oldallal párhuzamos egyenest. Ez az AB oldal meghosszabbítását E pontban metszi.

A szerkesztésből következik, hogy $BCDE$ legalább egy paralelogramma.

De az $ABD\sphericalangle \equiv BDC\sphericalangle$, mert belső váltó szögek ($AB \parallel CD$). Ugyanakkor $ABD\sphericalangle \equiv DBC\sphericalangle$, mert BD szögfelező, innen következik, hogy $BDC\sphericalangle \equiv DBC\sphericalangle$, vagyis $BC = CD$, tehát $BCDE$ rombusz.

Akkor: $BE = ED = BC$ (1)

$AE = EB - AB = BC - AB$ (2).

Alkalmazzuk az AED háromszögben a háromszög egyenlőtlenséget: $AE + ED > AD$, amelybe behelyettesítjük az (1). és (2). összefüggéseket: $BC - AB + BC > AD$, és innen következik, hogy $2BC > AD + AB$.

b) Ha $AB = BC$ akkor a fenti szerkesztésnek megfelelően az AE szakasz hossza nulla, tehát az A és E pontok egybeesnek, ekkor $EB = AD$. Tehát, $2BC = AD + AB$.

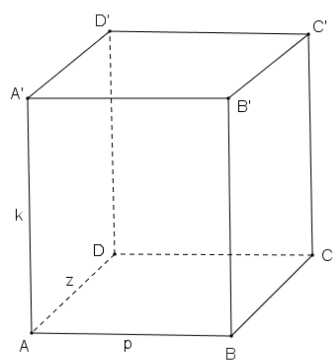
VIII. osztály

1. feladat:

Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest egyenlő hosszúságú éleit azonos színnel festették be. Koppány az A csúcsból az élek mentén a C' csúcsba vezető utakat kereste úgy, hogy egy úton belül a téglatest bármelyik csúcsát maximum egyszer érintette, és közben számolta, hogy a különböző színű élekből hányat érintett. Határozd meg, hogy hány élet számolt össze az egyes színekből, ha tudjuk, hogy az összes lehetséges utat végigjárta.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:



I. eset: Az egy csúcsból kiinduló élek különböző hosszúságúak. A három szín legyen például piros, zöld és kék.

Legyen az AB és a vele egyenlő élek színe piros, az AD és a vele egyenlő élek színe zöld, az AA' és a vele egyenlő élek színe kék.

A továbbiakban csak azokat az utakat tanulmányozzuk, amelyeknek a kezdete az AB él. Ilyen útból 6 darab van éspedig:

1) $A-B-B'-C'$
2) $A-B-B'-A'-D'-C'$
3) $A-B-B'-A'-D'-D-C-C'$
4) $A-B-C-C'$
5) $A-B-C-D-D'-C'$
6) $A-B-C-D-D'-A'-B'-C'$

Most megszámolva, piros színű élből 14, kék színű élből 8 és zöld színű élből szintén 8 darab van.

Ha az AD -vel kezdődő utakat tekintjük, akkor 14 zöld, 8 kék és 8 piros élünk lesz. Ha pedig az AA' -tel kezdődő utakat tekintjük, akkor 14 kék, 8 zöld és 8 piros élünk lesz.

Tehát mindhárom színű élből 30 darab lesz.

II. eset: Ha az egy csúcsból kiinduló élek közül két él egyenlő hosszúságú, akkor ezekből 60, a harmadik típusból pedig 30 lesz.

III. eset: Ha az egy csúcsból kiinduló három él azonos hosszúságú, akkor csak egy színünk van, és ezek száma 90.

2. feladat:

a) Igazold, hogy $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{2016\cdot 2017}}{4033}<1008.$

b) Határozd meg az $n\in N$ legnagyobb értékét úgy, hogy fennálljon a következő egyenlőtlenség:
$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{2n\cdot(2n+1)}}{4n+1}<2017.$

Faluvégi Melánia, Zilah

Megoldás:

a) Ha $a,b\in N$, $a\neq b$, akkor $2\sqrt{ab}<a+$b, a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján. Innen következik, hogy:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{1}{2}$$
$$\frac{\sqrt{6}}{5}<\frac{1}{2}$$
$$\frac{\sqrt{12}}{7}<\frac{1}{2}$$
....
$$\frac{\sqrt{2016\cdot 2017}}{4033}<\frac{1}{2}$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségek megfelelő oldalait

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{2016\cdot 2017}}{4033}<\frac{1}{2}\cdot 2016=1008$$

b) Az a) alpontot felhasználva következik:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{2n\cdot(2n+1)}}{4n+1}<\frac{1}{2}\cdot 2n=n.$$

A feladat szerint $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{2n\cdot(2n+1)}}{4n+1}<2017$, tehát $n<2017$

Mivel $n\in N$, az n legnagyobb értéke 2016.

3. feladat:

Határozd meg azokat az x és y egész számokat, amelyekre $y\cdot\left(x-5y^2\right)=x$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás:

I. eset: Ha $y=0$, $0\cdot\left(x-5\cdot 0^2\right)=x\Rightarrow x=0.$

II. eset: Ha $y\neq 0$,

$$y\cdot\left(x-5y^2\right)=x\Leftrightarrow xy-5y^3=x\Leftrightarrow xy-x=5y^3\Leftrightarrow xy-x=5y^3-5+5\Leftrightarrow$$

$$x\cdot(y-1)=5\cdot\left(y^3-1\right)+5$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(y-1)=5\cdot(y-1)\cdot\left(y^2+y+1\right)+5$$

Mivel $y-1=0$ nem megoldása az egyenletnek, ezért $x=5\cdot\left(y^2+y+1\right)+\dfrac{5}{y-1}$

$$x\in Z\Rightarrow\frac{5}{y-1}\in Z\Rightarrow(y-1)\in\{-5;-1;+1;+5\}$$

ha $y-1=-1\Rightarrow y=0$, és ez ellentmond a feltételnek.

ha $y-1=1\Rightarrow y=2\Rightarrow x=5\cdot\left(2^2+2+1\right)+\dfrac{5}{1}=40\in Z$

ha $y-1=-5\Rightarrow y=-4\Rightarrow x=5\cdot(16-4+1)+\dfrac{5}{-5}=64\in Z$

ha $y-1=5\Rightarrow y=6\Rightarrow x=5\cdot(36+6+1)+\dfrac{5}{5}=216\in Z$

Megoldások: $(x,y)\in\{(0;0),(40;2),(64;-4),(216;6)\}$

Második megoldás:

Legyen $x=yt,\ t\in N$

Ekkor az egyenlet

$$yt-5y^2=t\Leftrightarrow t(y-1)=5y^2\Leftrightarrow t(y-1)=5y^2-5+5\Leftrightarrow t(y-1)=5(y-1)(y+1)+5$$

és így tovább, lásd az első megoldást.

4. feladat:

Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $3n-5$, $4n-3$, $5n+1$ három egymás utáni természetes szám négyzetei. Melyek ezek a négyzetszámok?

Bencze Mihály, Bukarest

Legyen $3n-5=a^2$, $4n-3=(a+1)^2$ és $5n+1=(a+2)^2$

$4n-3-(3n-5)=(a+1)^2-a^2$

$n=2a-1$

$5(2a-1)=(a+2)^2$

$a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0$

Ha $a-2=0 \Rightarrow a=2,\ n=3$

Ha $a-4=0 \Rightarrow a=4,\ n=7$

A kapott négyzetszámok: $2^2, 3^2, 4^2$ és $4^2, 5^2, 6^2$

5. feladat:

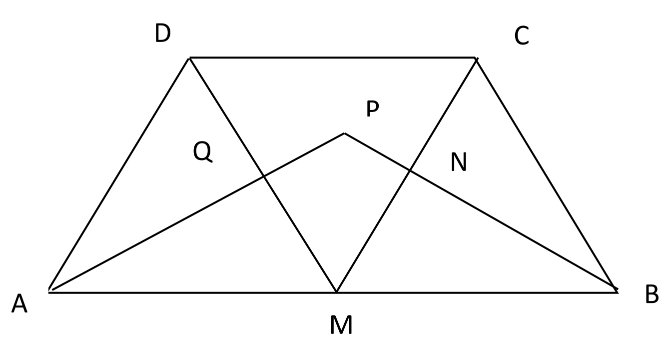
Az ABCD trapézban AB ∥ CD, AB > CD és $M \in [AB]$ úgy, hogy $[AD] \equiv [AM]$ és $[BC] \equiv [BM]$.

Igazold, hogy:

a) DM és CM szögfelezők;
b) a trapéz belső szögfelezőinek metszéspontjai egy körbeírható négyszög csúcsai;
c) a $CMD\sphericalangle$ mértéke az $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ szögek mértékeinek számtani közepe;
d) az $APB\sphericalangle$ mértéke a $D\sphericalangle$ és $C\sphericalangle$ mértékeinek számtani közepe.

Oláh Miklós, Kraszna

Megoldás:



a) $\left.\begin{array}{r} ADM \text{ háromszög egyenlő szárú} \Rightarrow AMD\sphericalangle \equiv ADM\sphericalangle \\ AB \parallel CD, DM \text{ szelő} \Rightarrow AMD\sphericalangle \equiv MDC\sphericalangle \end{array}\right\} \Rightarrow ADM\sphericalangle \equiv MDC\sphericalangle \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (DM szögfelező

Hasonlóan, $DCM\sphericalangle \equiv MCB\sphericalangle \Rightarrow$ (CM szögfelező

b) AMD háromszög egyenlő szárú, (AQ szögfelező $\Rightarrow AQ \perp DM$

BCM háromszög egyenlő szárú, (PN szögfelező $\Rightarrow BN \perp MC$

Az MNPQ négyszögben $m(MQP\sphericalangle) = m(MNP\sphericalangle) = 90° \Rightarrow$ MNPQ körbeírható

c) AQM_{Δ} – ben $m(AMQ\sphericalangle) = 90° - \dfrac{m(A\sphericalangle)}{2}$

BQN_{Δ} – ben $m(BMN\sphericalangle) = 90° - \dfrac{m(B\sphericalangle)}{2}$

$$m(DMC\sphericalangle) = 180° - [m(AMQ\sphericalangle) + m(BMN\sphericalangle)] = 180° - m(AMQ\sphericalangle) - m(BMN\sphericalangle) =$$

$$= 180° - 90° + \frac{m(A\sphericalangle)}{2} - 90° + \frac{m(B\sphericalangle)}{2} = \frac{m(A\sphericalangle) + m(B\sphericalangle)}{2}$$

d) $m(APB\sphericalangle) = 180° - m(DMC\sphericalangle) = 180° - \dfrac{m(A\sphericalangle) + m(B\sphericalangle)}{2}$

$$m(APB\sphericalangle) = \frac{180° - m(A\sphericalangle)}{2} + \frac{180° - m(B\sphericalangle)}{2} = \frac{m(C\sphericalangle)}{2} + \frac{m(D\sphericalangle)}{2} = \frac{m(C\sphericalangle) + m(D\sphericalangle)}{2}$$

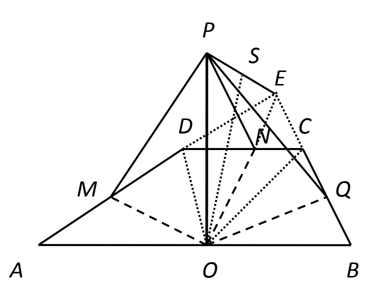
6. feladat:

Az *ABCD* trapéz CD kisalapjának hossza 6 cm. Az *AB* oldalának *O* felezőpontjában merőlegest állítunk a trapéz síkjára, amelyen felvesszük a *P* pontot. Tudjuk, hogy a *P* pont $3\sqrt{15}$ cm távolságra van a trapéz kisalapjától és a száraitól, a trapéz síkjától mért távolsága pedig $6\sqrt{3}$ cm.

a) Igazold, hogy a trapéz egyenlő szárú!
b) Számítsd ki a nagyalap hosszát!
c) Ha $AD \cap BC = \{E\}$ és S a $[PE]$ felezőpontja, bizonyítsd be, hogy $PE \perp (SAB)$!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás:



a) $\left.\begin{array}{l} PO \perp (ABCD) \\ PN \perp DC \end{array}\right\} \xrightarrow{3\perp t.1.f.t.} ON \perp DC$

Ugyanígy $OM \perp AD$ és $OQ \perp BC$

$POM_{\triangle} \equiv PON_{\triangle} \equiv POQ_{\triangle}$, (*a-b eset*) mert $[PO]$ közös és $PM = PN = PQ \Rightarrow OM = ON = OQ$

$(DO$ és $(CO$ szögfelezők $\Rightarrow$ $ADO\sphericalangle \equiv ODC\sphericalangle$, de $ODC\sphericalangle \equiv DOA\sphericalangle \Rightarrow ADO\sphericalangle \equiv AOD\sphericalangle \Rightarrow$ $ADO_{\triangle}$ egyenlő szárú $AO = AD$

Ugyanígy $BOC_{\triangle}$ is egyenlő szárú $\Rightarrow OB = BC$

$\Rightarrow AD = BC \Rightarrow ABCD$ egyenlő szárú trapéz.

b) A PON derékszögű háromszögben felírjuk Pitagorasz tételét:

$$ON = \sqrt{PN^2 - OP^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{15}\right)^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{135-108} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$DC = 6$, $DOC_{\triangle}$ egyenlő szárú $\Rightarrow DN = 3$ és $ON = 3\sqrt{3} \Rightarrow tg\,(ODN\sphericalangle) = \dfrac{NO}{ND} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow$ $m(ODN\sphericalangle) = 60° \Rightarrow ODC_{\triangle}$ egyenlő oldalú.

$OD = OA = AD \Rightarrow AOD$, ODC és OBC egybevágó egyenlő oldalú háromszögek.

Így a nagyalap hossza $AB = 12$ cm.

c) ABE egyenlő oldalú háromszög, $AB = 12 \Rightarrow OE = 6\sqrt{3} \Rightarrow PO = OE$, a POE háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow PE \perp SO$. (1)

$AB \perp (POE) \Rightarrow PE \perp AB$. (2)

(1) és (2) $\Rightarrow PE \perp (SAB)$.

BIZOTTSÁGOK

A versenybizottság tagjai

dr. Kupán Pál	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem	Marosvásárhely	Maros megye
Gnándt Zoltán	Szatmár Megyei Tanfelügyelőség	Szatmárnémeti	Szatmár megye
dr. Bencze Mihály	Ady Endre Elméleti Líceum	Bukarest	Bukarest
Varga György Csaba	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye

Tagok

Szilveszter Ibolya	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Zajzon Csaba	Gaál Mózes Általános Iskola	Barót	Kovászna megye
Faluvégi Melania	Simion Bărnuțiu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Polcz Zita	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Líceum	Nagybánya	Máramaros megye
Simon József	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Nagy Örs	Báthory István Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozy megye
Horváth Éva	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Simon János	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Spier Tünde	Csiky Gergely Főgimnázium	Arad	Arad megye
Pálhegyi Farkas-László	Mihai Eminescu Főgimnázium	Nagyvárad	Bihar megye
Báthori Éva	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Császár Sándor	Kiss Ferenc Általános Iskola	Csíkmadaras	Hargita megye
Vad Marta	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Mátyás Ildikó Beáta	Mircea Eliade Általános Iskola	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Fülöp Edith	Áprily Lajos Főgimnázium	Brassó	Brassó megye
Cziprok Andrei	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Fodor Erika	Andrei Mureșanu Főgimnázium	Beszterce	Beszterce-Naszód megye
Jakab-Medvessi Andrea-Alice	Apáczai Csere János Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Szekely Tivadar	George Popa Általános Iskola	Medgyes	Szeben megye
Bara Lajos István	Wesselényi Református Kollégium	Zilah	Szilágy megye

A feladatsorokat és megoldásokat összeállító albizottság tagjai

dr. Kupán Pál	Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem	Marosvásárhely	Maros megye
dr. Bencze Mihály	Ady Endre Elméleti Líceum	Bukarest	Bukarest
Szilveszter Ibolya	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Zajzon Csaba	Gaál Mózes Általános Iskola	Barót	Kovászna megye
Faluvégi Melania	Simion Bărnuțiu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Polcz Zita	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Líceum	Nagybánya	Máramaros megye
Simon József	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Nagy Örs	Báthory István Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozy megye
Horváth Éva	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Simon János	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Spier Tünde	Csiky Gergely Főgimnázium	Arad	Arad megye
Pálhegyi Farkas-László	Mihai Eminescu Főgimnázium	Nagyvárad	Bihar megye
Báthori Éva	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Császár Sándor	Kiss Ferenc Általános Iskola	Csíkmadaras	Hargita megye
Vad Marta	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Mátyás Ildikó Beáta	Mircea Eliade Általános Iskola	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Fülöp Edith	Áprily Lajos Főgimnázium	Brassó	Brassó megye

A dolgozatokat értékelő albizottság tagjai

Szilveszter Ibolya	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Zajzon Csaba	Gaál Mózes Általános Iskola	Barót	Kovászna megye
Faluvégi Melania	Simion Bărnuțiu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Polcz Zita	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Líceum	Nagybánya	Máramaros megye
Simon József	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Nagy Örs	Báthory István Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Horváth Éva	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Simon János	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Spier Tünde	Csiky Gergely Főgimnázium	Arad	Arad megye
Pálhegyi Farkas-László	Mihai Eminescu Főgimnázium	Nagyvárad	Bihar megye
Báthori Éva	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Császár Sándor	Kiss Ferenc Általános Iskola	Csíkmadaras	Hargita megye
Vad Marta	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Mátyás Ildikó Beáta	Mircea Eliade Általános Iskola	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Fülöp Edith	Áprily Lajos Főgimnázium	Brassó	Brassó megye
Cziprok Andrei	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Fodor Erika	Andrei Mureșanu Főgimnázium	Beszterce	Beszterce-Naszód megye
Jakab-Medvessi Andrea-Alice	Apáczai Csere János Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Szekely Tivadar	George Popa Általános Iskola	Medgyes	Szeben megye
Bara Lajos István	Wesselényi Református Kollégium	Zilah	Szilágy megye

A szervezőbizottság tagjai

Durla Paşca Mihai Călin	Szatmár Megyei Tanfelügyelőség	Szatmárnémeti	elnök
Muntean Valerica Doina	Szatmár Megyei Tanfelügyelőség	Szatmárnémeti	ügyvezető elnök
Gnándt Zoltán	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	alelnök
Koczinger Éva	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	alelnök
Ádámkó István Csaba	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	titkár
Csapó Ilyés Attila Csaba	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	titkár
Polcz Zita	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	tag
Kabai Tímea	Ioan Slavici Főgimnázium	Szatmárnémeti	tag
Frigy Szabolcs	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	tag
Varga György	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	tag
Simon Laura	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	tag
Hadházi Erzsébet Éva	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	tag
Heinrich Andrea	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	tag

FELKÉSZÍTŐ TANÁROK

Budacsek Terezia	Aurel Vlaicu Általános Iskola	Arad	Arad megye
Kurunczi Andrea	Csiky Gergely Főgimnázium	Arad	Arad megye
Spier Tünde	Csiky Gergely Kollégium	Arad	Arad megye
Tankó Mihály	Dani Gergely Általános Iskola	Gyimesbükk	Bákó megye
Bálint Csilla	Andrei Mureşanu Főgimnázium	Beszterce	Beszterce-Naszód megye
Fodor Erika	Andrei Mureşanu Főgimnázium	Beszterce	Beszterce-Naszód megye
Lakatos Imre	Szentmátéi Általános Iskola	Szentmáté	Beszterce-Naszód megye
Szabó Ildikó	Grigore Silasi Általános Iskola	Bethlen	Beszterce-Naszód megye
Báthori Éva	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Bődi János	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Hodgyai Edit	Miskolczy Károly Általános Iskola	Micske	Bihar megye
Jámbor Csilla Margit	Arany János Elméleti Líceum	Nagyszalonta	Bihar megye
Kovács Clara	Lorántffy Zsuzsanna Református Gimnázium	Nagyvárad	Bihar megye
Molnár Tünde Éva	Szacsvay Imre Általános Iskola	Nagyvárad	Bihar megye
Orban Ilona	1-es számú Műszaki Líceum	Berettyószéplak	Bihar megye
Balázs Anna	2-es számú Általános Iskola	Brassó	Brassó megye
Farkas Anna Lili	Áprily Lajos Főgimnázium	Brassó	Brassó megye
Fülöp Edith	Áprily Lajos Főgimnázium	Brassó	Brassó megye
Papp Ilonka	George Moroianu Elméleti Líceum	Négyfalu	Brassó megye
Szilveszter Hajnalka	15-ös számú Általános Iskola	Brassó	Brassó megye
Orbán Ildikó	Bethlen Samuel Általános Iskola	Alsórákos	Brassó megye
Forró Enikő	Ady Endre Elméleti Líceum	Bukarest	Bukarest
Palai Rita-Orsolya	Gróf Majláth Gusztáv Károly Római Katolikus Teológiai Líceum	Gyulafehérvár	Fehér megye
András Ibolya	Tamási Áron Elméleti Líceum	Székelyudvarhely	Hargita megye
Birta Mária	Nagy Imre Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Császár Sándor	Kiss Ferenc Általános Iskola	Csíkmadaras	Hargita megye
Csata Lili	Nagy István Művészeti Líceum	Csíkszereda	Hargita megye
Deák Zsuzsánna	Tamási Áron Elméleti Líceum	Székelyudvarhely	Hargita megye
György András	Fogarasy Mihály Általános Iskola	Gyergyó	Hargita megye
Lázár Ileana	Székely Mózes Általános Iskola	Lövéte	Hargita megye
Lázár Nóra	Fogarasy Mihály Általános Iskola	Gyergyó	Hargita megye
Molnár Klára	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Nagy Jenő	Orbán Balázs Általános Iskola	Székelyudvarhely	Hargita megye
Péter Csilla	József Attila Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Péterfi Margit	Tamási Áron Elméleti Líceum	Székelyudvarhely	Hargita megye
Simon József	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Szász Tikosi Zoltán	Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium	Székelyudvarhely	Hargita megye

Kasler Eniko Ildiko	Téglás Gábor Elméleti Líceum	Déva	Hunyad megye
Kocsis Attila Levente	Téglás Gábor Elméleti Líceum	Déva	Hunyad megye
Marton Ildiko	Mircea Eliade Elméleti Líceum - 1-es számú Általános Iskola	Lupény	Hunyad megye
Tofalvi Emese Ildiko	Téglás Gábor Elméleti Líceum	Déva	Hunyad megye
Bajor Katalin	Sigismund Toduţă Zenei Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Durugy Erika	Jósika Miklós Elméleti Líceum	Torda	Kolozs megye
Ferencz Ilona	Bálványosváraljai Általános Iskola	Bálványosváralja	Kolozs megye
Halász Csilla	Nicolae Titulescu Általános Iskola	Kolozsvár	Kolozs megye
Jakab-Medvessi Andrea-Alice	Apáczai Csere János Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Nagy Örs	Báthory István Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Nyitrai Ioan	János Zsigmond Unitárius Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Sebestyén Árpád	Báthory István Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Timar Maria	János Zsigmond Unitárius Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Deák Éva	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Gödri Judith	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Henning Edit	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Máthé Attila István	Mikes Kelemen Elméleti Líceum	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Tóth Zsuzsánna	Nagy Mózes Elméleti Líceum	Kézdivásárhely	Kovászna megye
Varga Csilla	Mikes Kelemen Elméleti Líceum	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Zajzon Csaba	Gaál Mózes Általános Iskola	Barót	Kovászna megye
Kész Mária	Nagy Mózes Elméleti Líceum	Kézdivásárhely	Kovászna megye
Balogh Eniko	Autószállítási Műszaki Kollégium	Felsőbánya	Máramaros megye
Jasz Josif	Nicolae Iorga Általános Iskola	Nagybánya	Máramaros megye
Mastan Eliza	Nicolae Iorga Általános Iskola	Nagybánya	Máramaros megye
Bálint Attila Sándor	Marosvásárhelyi Művészeti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Bartos Honorea	Dr. Bernády György Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Horváth Éva	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Kelemen János	S. Illyés Lajos Általános Iskola	Szováta	Maros megye
Lengyel-Fischer Agnes	Mátyus István Általános Iskola	Kibéd	Maros megye
Magyari Levente	Dacia Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Mátéfi István	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Raikov Veselinov Levente	Petru Maior Műszaki Líceum	Szászrégen	Maros megye
Secareanu Eva	Europa Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Szilágyi Teréz-Emőke	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Erdei Mária Andrea	Mezőfényi Általános Iskola	Mezőfény	Szatmár megye
Forgács István	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	Szatmárnémeti	Szatmár megye

Koczinger Éva	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Nagy Réka-Maria	Josephus Calasantius Római Katolikus Teológiai Líceum	Nagykároly	Szatmár megye
Polcz Zita	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Tempfli Gabriella	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Székely Éva	Báthory István Általános Iskola	Medgyes	Szeben megye
Bara Lajos	Wesselényi Református Kollégium	Zilah	Szilágy megye
Bernat Andrea	Mihai Eminescu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Faluvégi Melánia	Simion Bărnuţiu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Sólyom Erzsébet	1-es számú Technológiai Líceum	Sarmaság	Szilágy megye
Albert Etelka	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Păcurar Maria	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Szilveszter Ibolya	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye

VERSENYZŐ DIÁKOK

Almási Kristóf	V.	Aurel Vlaicu Általános Iskola	Arad	Arad megye
Bartos Kriszta	V.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Benedek Márton	V.	Nagy István Művészeti Líceum	Csíkszereda	Hargita megye
Bihari Dániel-Gergő	V.	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Bimbó Zorka	V.	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Bodó Bence	V.	Europa Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Bruncsák Gergely	V.	Szacsvay Imre Általános Iskola	Nagyvárad	Bihar megye
Denes Isabella-Karin	V.	Báthory István Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Durugy Attila	V.	Jósika Miklós Elméleti Líceum	Torda	Kolozs megye
Fancsali Bíborka-Tímea	V.	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Fülöp Bence	V.	Orbán Balázs Általános Iskola	Székelyudvarhely	Hargita megye
Hupka Dominik	V.	Autószállítási Műszaki Kollégium	Felsőbánya	Máramaros megye
Iuhos Ilka	V.	Szentmátéi Általános Iskola	Szentmáté	Beszterce-Naszód megye
Jakab Kurkó Norbert	V.	2-es számú Általános Iskola	Brassó	Brassó megye
Kacsó Renáta	V.	Téglás Gábor Elméleti Líceum	Déva	Hunyad megye
Karikás Mátyás	V.	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Keresztes Anna	V.	Simion Bărnuţiu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Linzenbold Frida	V.	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Ludescher László	V.	Marosvásárhelyi Művészeti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Márton Balázs	V.	Bethlen Samuel Általános Iskola	Alsórákos	Brassó megye
Miklós Janka	V.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Nagy Ábel Gergely	V.	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Nagy Gergő	V.	Tamási Áron Elméleti Líceum	Székelyudvarhely	Hargita megye
Orosz Timea	V.	Báthory István Általános Iskola	Medgyes	Szeben megye
Sándor Kincső	V.	Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium	Székelyudvarhely	Hargita megye
Simon László	V.	Europa Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Szabó Thalmeiner Balázs	V.	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Szakács Anna-Sára	V.	Apáczai Csere János Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Szanda Antónia	V.	Aurel Vlaicu Általános Iskola	Arad	Arad megye
Tamás Péter	V.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Tatár Ágota	V.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Török-Schuller Lilla	V.	János Zsigmond Unitárius Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye

Zayzon Réka-Orsolya	V.	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Antal Levente	VI.	Dani Gergely Általános Iskola	Gyimesbükk	Bákó
Bac Beatrix Barbara	VI.	Csiky Gergely Főgimnázium	Arad	Arad megye
Barta-Zágoni Bernadette	VI.	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Bán Erik Roland	VI.	Nicolae Iorga Általános Iskola	Nagybánya	Máramaros megye
Bereczki Anna	VI.	Mikes Kelemen Elméleti Líceum	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Berkeczi Róbert	VI.	Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium	Székelyudvarhely	Hargita megye
Bodnár Mónika Brigitta	VI.	Lorántffy Zsuzsanna Református Gimnázium	Nagyvárad	Bihar megye
Csobanka Alex	VI.	Mihai Eminescu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Dobra László Edgár	VI.	Nagy Mózes Elméleti Líceum	Kézdivásárhely	Kovászna megye
Erős Ioo Enikő Kincső	VI.	Miskolczy Károly Általános Iskola	Micske	Bihar megye
Farkas Balázs Rafael	VI.	Csiky Gergely Főgimnázium	Arad	Arad megye
Fekete Tamara	VI.	Nagy István Művészeti Líceum	Csíkszereda	Hargita megye
Ferencz Péter	VI.	Bálványosváraljai Általános Iskola	Bálványosváralja	Kolozs megye
Józsa Vivienn	VI.	Áprily Lajos Főgimnázium	Brassó	Brassó megye
Juhász Ákos	VI.	János Zsigmond Unitárius Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Kabai Tünde	VI.	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Kiss Máté Kristóf	VI.	1-es számú Technológiai Líceum	Sarmaság	Szilágy megye
Lacz Kinga	VI.	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Nagy Boglárka	VI.	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Nagy Vid Zsolt	VI.	Tamási Áron Elméleti Líceum	Székelyudvarhely	Hargita megye
Nagy Zsuzsa	VI.	Dr. Bernády György Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Orosz Soma	VI.	Fogarasy Mihály Általános Iskola	Gyergyó	Hargita megye
Pap József Attila	VI.	Arany János Elméleti Líceum	Nagyszalonta	Bihar megye
Răduță Cristian	VI.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Rozsnyai Timea Anikó	VI.	15-ös számú Általános Iskola	Brassó	Brassó megye
Simon Antónia	VI.	Grigore Silasi Általános Iskola	Bethlen	Beszterce-Naszód megye
Sofalvi Zsolt Robert	VI.	Mircea Eliade Elméleti Líceum - 1-es számú Általános Iskola	Lupény	Hunyad megye
Szabó Péter	VI.	János Zsigmond Unitárius Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Szász Dávid	VI.	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye

Újfalusi Ábel	VI.	Petru Maior Műszaki Líceum	Szászrégen	Maros megye
Vajda Péter	VI.	Europa Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Veres Dóra Viktória	VI.	Arany János Elméleti Líceum	Nagyszalonta	Bihar megye
Vizi Attila	VI.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Ambrus Márk	VII.	Nagy Imre Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Back István Levente	VII.	Csiky Gergely Kollégium	Arad	Arad megye
Bányai Márk	VII.	Nicolae Iorga Általános Iskola	Nagybánya	Máramaros megye
Boda Edina	VII.	Simion Bărnuţiu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Bonta Renáta Britta	VII.	Báthory István Elméleti Líceum	Kolozsvár	Kolozs megye
Cozan Zoltán Jennifer Crista	VII.	Andrei Mureşanu Főgimnázium	Beszterce	Beszterce-Naszód megye
Demeter Gergő	VII.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Éles Júlia	VII.	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Fancsali Boglárka	VII.	Tamási Áron Elméleti Líceum	Székelyudvarhely	Hargita megye
Fehér Anna	VII.	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Jakab Árpád	VII.	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Jánó Róbert	VII.	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Kaiser Dániel	VII.	Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium	Székelyudvarhely	Hargita megye
Kis Anita	VII.	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Kotró Előd	VII.	Nagy Mózes Elméleti Líceum	Kézdivásárhely	Kovászna megye
Kovács Álmos	VII.	Gaál Mózes Általános Iskola	Barót	Kovászna megye
Kovacs Márk Daniel	VII.	Aurel Vlaicu Általános Iskola	Arad	Arad megye
Kun Édua-Boróka	VII.	Lorántffy Zsuzsanna Református Gimnázium	Nagyvárad	Bihar megye
Lázár Róbert-Venczel	VII.	Székely Mózes Általános Iskola	Lövéte	Hargita megye
Márkó Ágnes	VII.	Gaál Mózes Általános Iskola	Barót	Kovászna megye
Osvath Robert-Levente	VII.	János Zsigmond Unitárius Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Osvath Mihaly	VII.	Téglás Gábor Elméleti Líceum	Déva	Hunyad megye
Papp Gellért Szabolcs	VII.	Mátyus István Általános Iskola	Kibéd	Maros megye
Pongrácz Kristóf	VII.	Fogarasy Mihály Általános Iskola	Gyergyó	Hargita megye
Pop Norbert	VII.	János Zsigmond Unitárius Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Pünkösti Györk	VII.	Wesselényi Református Kollégium	Zilah	Szilágy megye
Szabó Csaba	VII.	George Moroianu Elméleti Líceum	Négyfalu	Brassó megye
Szentpáli Júlia Rebeka	VII.	15-ös számú Általános Iskola	Brassó	Brassó megye
Szilágyi Botond	VII.	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye

Szabó Eduard Viktor	VIII.	Gróf Majláth Gusztáv Károly Római Katolikus Teológiai Líceum	Gyulafehérvár	Fehér megye
András Zsolt	VIII.	Székely Mózes Általános Iskola	Lövéte	Hargita megye
Árva Norbert Ákos	VIII.	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Bartalis Orsolya	VIII.	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Bede Ákos Máté	VIII.	1-es számú Műszaki Líceum	Berettyószéplak	Bihar megye
Bucescu Andreea Blanka	VIII.	Áprily Lajos Főgimnázium	Brassó	Brassó megye
Divin Judit	VIII.	Ady Endre Elméleti Líceum	Nagyvárad	Bihar megye
Fischer Mátyás Zsigmond	VIII.	Mezőfényi Általános Iskola	Mezőfény	Szatmár megye
Fogarasi András	VIII.	Nicolae Titulescu Általános Iskola	Kolozsvár	Kolozs megye
Fuccaro Orsolya	VIII.	Dacia Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Gagyi Orsolya	VIII.	Nicolae Iorga Általános Iskola	Nagybánya	Máramaros megye
Geller Levente	VIII.	Báthory István Általános Iskola	Medgyes	Szeben megye
Grancsa Robert	VIII.	Ady Endre Elméleti Líceum	Bukarest	Bukarest
Hegyi Júlia	VIII.	S. Illyés Lajos Általános Iskola	Szováta	Maros megye
Imre Tamás	VIII.	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Kotró Kosztándi Anna	VIII.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Kováts Álmos Botond	VIII.	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum	Szatmárnémeti	Szatmár megye
Laczkó Csongor	VIII.	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Ludescher Júlia	VIII.	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Matyas Daniel	VIII.	Mihai Eminescu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Müller Ágnes	VIII.	Andrei Mureșanu Főgimnázium	Beszterce	Beszterce-Naszód megye
Muszka Csaba	VIII.	Josephus Calasantius Római Katolikus Teológiai Líceum	Nagykároly	Szatmár megye
Orosz Katalin	VIII.	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye
Péter Ákos	VIII.	Kiss Ferenc Általános Iskola	Csíkmadaras	Hargita megye
Prunache Anna Eveline	VIII.	Ady Endre Elméleti Líceum	Bukarest	Bukarest
Sarkozi Lorand	VIII.	Téglás Gábor Elméleti Líceum	Déva	Hunyad megye
Simon-Zsók Anett	VIII.	Mikes Kelemen Elméleti Líceum	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Sógor Bence	VIII.	Sigismund Toduţă Zenei Kollégium	Kolozsvár	Kolozs megye
Szabó Balázs	VIII.	József Attila Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Tóth Tibor Richárd	VIII.	Csiky Gergely Főgimnázium	Arad	Arad megye
Vitályos Norbert	VIII.	Nagy Mózes Elméleti Líceum	Kézdivásárhely	Kovászna megye

KÍSÉRŐ TANÁROK

Budacsek Terezia	Aurel Vlaicu Általános Iskola	Arad	Arad megye
Tankó Mihály	Dani Gergely Általános Iskola	Gyimesbükk	Bákó megye
Balint Csilla	Andrei Mureșanu Főgimnázium	Beszterce	Beszterce-Naszód megye
Kovács Clara	Lorántffy Zsuzsanna Református Gimnázium	Nagyvárad	Bihar megye
Hodgyai Edit	Miskolczy Károly Általános Iskola	Micske	Bihar megye
Szilveszter Hajnalka-Szidonia	15-ös számú Általános Iskola	Brassó	Brassó megye
Forró Enikő	Ady Endre Elméleti Líceum	Bukarest	Bukarest
Palai Rita-Orsolya	Gróf Majláth Gusztáv Károly Római Katolikus Teológiai Líceum	Gyulafehérvár	Fehér megye
Molnár Klára	Petőfi Sándor Általános Iskola	Csíkszereda	Hargita megye
Deák Zsuzsánna	Tamási Áron Elméleti Líceum	Székelyudvarhely	Hargita megye
Kiss Mihai-Andrei	Matei Corvin Műszaki Kollégium	Vajdahunyad	Hunyad megye
Ferencz Ilona	Bálványosváraljai Általános Iskola	Bálványosváralja	Kolozs megye
Durugy Erika	Jósika Miklós Elméleti Líceum	Torda	Kolozs megye
Gödri Judith	Székely Mikó Kollégium	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Varga Csilla	Mikes Kelemen Elméleti Líceum	Sepsiszentgyörgy	Kovászna megye
Balogh Enikő Márta	Autószállítási Műszaki Kollégium	Felsőbánya	Máramaros megye
Secareanu Éva	Europa Általános Iskola	Marosvásárhely	Maros megye
Szilágyi Emőke	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	Marosvásárhely	Maros megye
Erdei Mária Andrea	Mezőfényi Általános Iskola	Mezőfény	Szatmár megye
Székely Éva	Báthory István Általános Iskola	Medgyes	Szeben megye
Bernát Andrea	Mihai Eminescu Általános Iskola	Zilah	Szilágy megye
Miklós Renáta	Bartók Béla Elméleti Líceum	Temesvár	Temes megye

TÁMOGATÓINK

- **Nemzeti Oktatásügyi Minisztérium**
  Ministerul Educației Naționale

- **Szatmár Megyei Tanfelügyelőség**
  Inspectoratul Școlar Județean Satu Mare

- **Consiliul Județean Satu Mare**
  Szatmár Megyei Tanács

- **Autonet Import Kft.**

- **Szatmári Római Katolikus Püspökség**

- **Tarr Beton Kft.**

- **Szatmári Egyházmegyei Caritas Szervezet**
- **Hans Lindner Alapítvány**
- **TBA Kft.**
- **Sentierri Kft.**
- **Kreativ Kft.**
- **Idea Studio Kft.**
- **Adsonatum Szülőegyesület**

- **Erdei Dolóczki István**
  Szatmár megyei képviselő

- **Pax Alapítvány**

Hám János
Római Katolikus Teológiai Líceum